A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT IV

Galowice, 2 maja 2013

Lista 20

ZADANIE 1. Wiadomo, że na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $H = \mathbb{C}^n$, każdy operator jest operatorem mnożenia przez macierz zespoloną: $T(x) = xA$, gdzie $A = [a_{i,j}]$ jest wymiaru $n \times n$, a x jest wektorem wierszowym $(x_1, \ldots, x_n)$.
(a) Jak wygląda macierz operatora sprzężonego?
(b) Zidentyfikuj operatory (macierze) hermitowskie i projekcje ortogonalne.
(c)* Zidentyfikuj dowolne projekcje.
(d)* Zidentyfikuj macierze normalne.

ZADANIE 2. Udowodnij, że spektrum macierzy jest tym samym czym jej spektrum punktowe, czyli pokrywa się ze zbiorem wartości własnych, czyli ze zbiorem zer wielomianu charakterystycznego $\det(\lambda I - A) = 0$ (teraz I oznacza macierz jednostkową $n \times n$), a promień spektralny to maksymalny moduł wartości własnej.

ZADANIE 3. Dla operatora normalnego udowodnij wzór

$$\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \ \|x\| = 1\}.$$

Podaj przykład operatora (nie normalnego), dla którego wzór ten nie działa.

ZADANIE 4. Sprawdź, że suma i złożenie operatorów normalnych są operatorami normalnymi. Jak to jest z operatorami hermitowskimi i unitarnymi?

ZADANIE 5. Na przestrzeni miarowej (Ω, Σ, μ) ustalmy funkcję mierzalną ograniczoną f. Na $H = L^2(\mu)$ zadajemy operator wzorem $T(g) = gf$.
(a) Sprawdź, że jest to operator ograniczony, oblicz jego normę.
(b) Jaki jest jego sprzężony?
(c) Czy jest to operator normalny?
(d) Kiedy jest on odwracalny?
(e) Kiedy jest on unitarny?
(f) Znajdź wartości własne operatora T.
(g) Zakładając, że $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}, \Sigma_{\text{borelowskie}}, \mu_{\text{Lebesgue'a}})$ i że f jest ciągła, znajdź widmo operatora T.

Tomasz Downarowicz